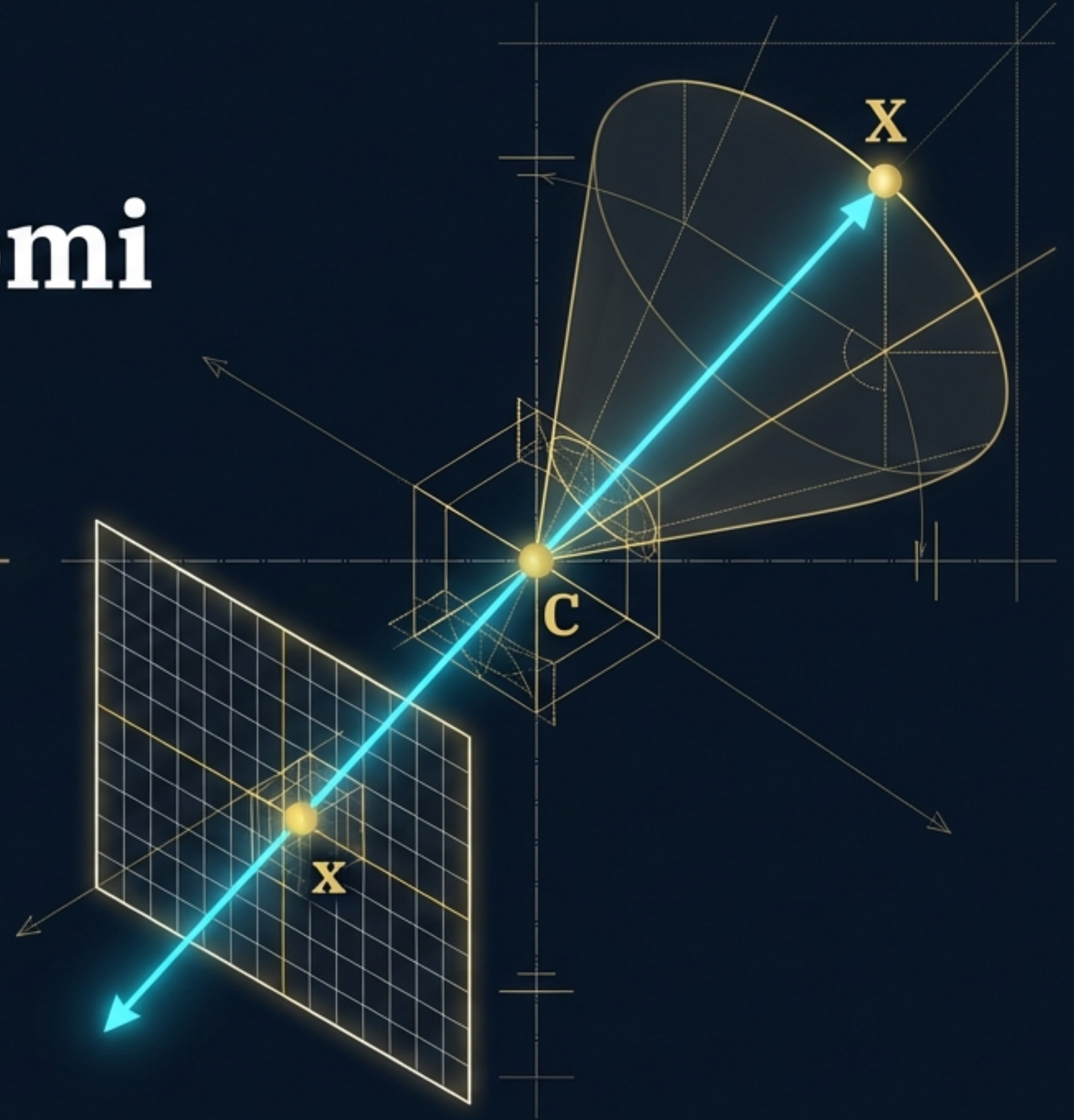


Kamera İzdüşüm Matrisi (P): Anatomi ve Geometri

Hartley ve Zisserman
Temelinde $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$
Dönüşümünün Cebirsel
ve Geometrik Derinlikleri



İzdüşümün Temel Denklemi ve Serbestlik Derecesi

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

$$w(x, y, 1)^T = \mathbf{P}(X, Y, Z, 1)^T$$

11 dof (Serbestlik Derecesi)

Kamera izdüşümü, 3 boyutlu yansıtılabilir uzaydan ($\mathbf{P}^3$) 2 boyutlu yansıtılabilir uzaya ($\mathbf{P}^2$) yapılan doğrusal bir dönüşümdür. Homojen koordinatlarda bu, 3×4 boyutlu rank-3 bir $\mathbf{P}$ matrisi ile ifade edilir.



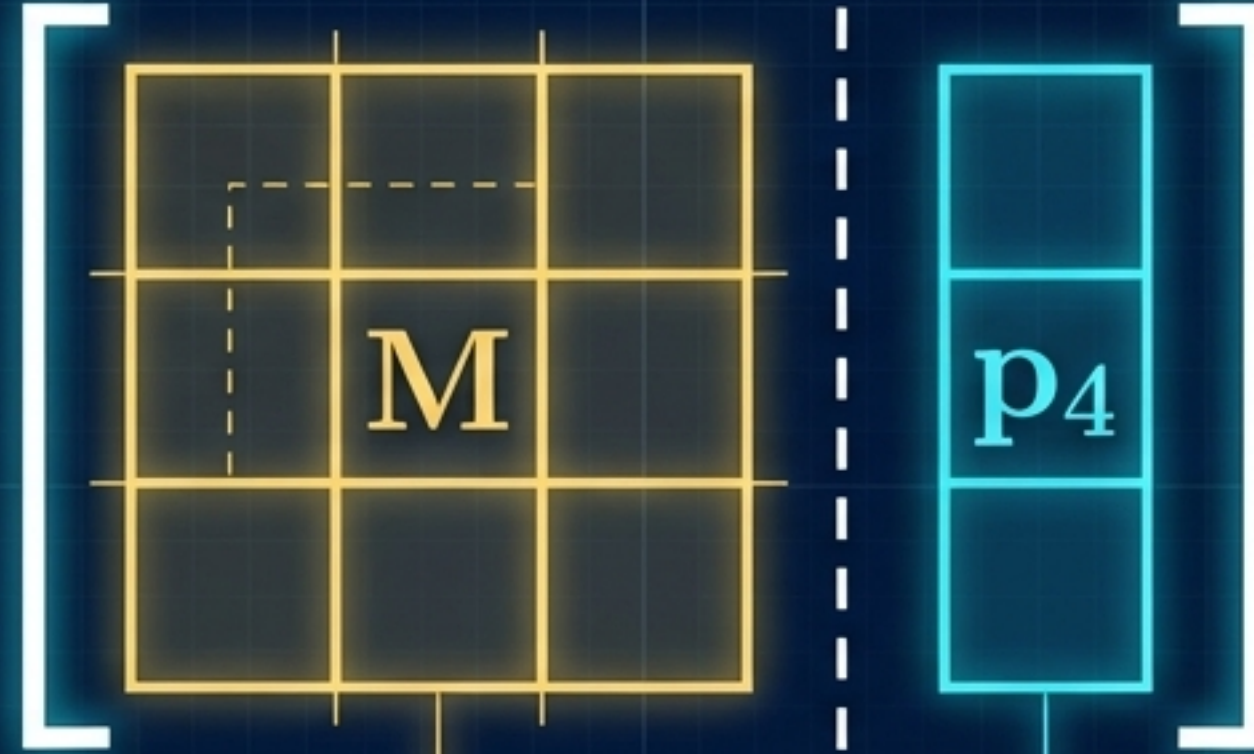
Matris Yapısı: İzdüşüm işlemleri homojen koordinatlarda ölçekten bağımsız olduğu için, genel bir projektif kameranın tam 11 serbestlik derecesi bulunur (12 eleman eksi 1 ortak ölçek çarpanı).



Optimizasyon İçin Önemi: Bu 11 parametre, sistemin taşıyabileceği maksimum geometrik bilgi kapasitesini tanımlar.

P Matrisinin Anatomisi: Blok Ayırıştırma

$$\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{p}_4]$$



Yönelim ve Ölçek Bloğu (M)

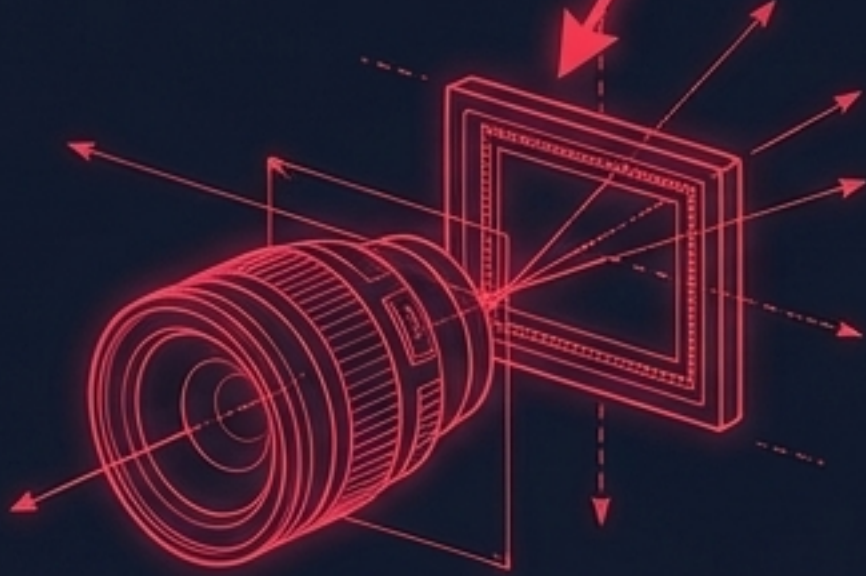
Sol 3x3 alt matris. Kameranın uzaydaki dönüşünü, ölçeğini ve içsel yansıtma özelliklerini barındırır.

Öteleme Vektörü ($\mathbf{p}_4$)

Sağ 3x1 sütun vektörü. Dünyanın orijininin görüntü düzlemindeki yerini tanımlar.

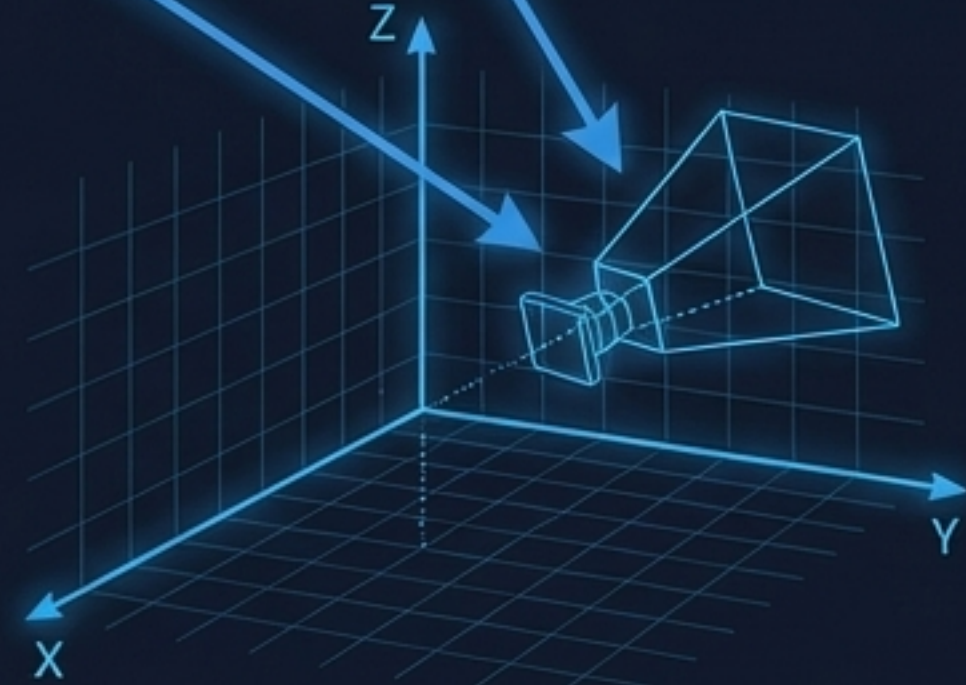
Sonluluk Kriteri (Finite Cameras): Kameranın fiziksel olarak uzayda sonlu bir noktada bulunup bulunmadığı doğrudan $\mathbf{M}$ bloğuna bağlıdır. Eğer $\det(\mathbf{M}) \neq 0$ ise, sol blok tekil değildir ve bu model bir Sonlu Projektif Kamerayı temsil eder.

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \mid \mathbf{t}] = \mathbf{KR} [\mathbf{I} \mid -\tilde{\mathbf{C}}]$$



İçsel Parametreler (Intrinsics - $\mathbf{K}$)

Üst üçgensel kalibrasyon matrisi. Sadece kameranın kendisine ait optik ve dijital özellikleri (odak uzaklığı, piksel yapısı) içerir.



Dışsal Parametreler (Extrinsics - $\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{C}}$)

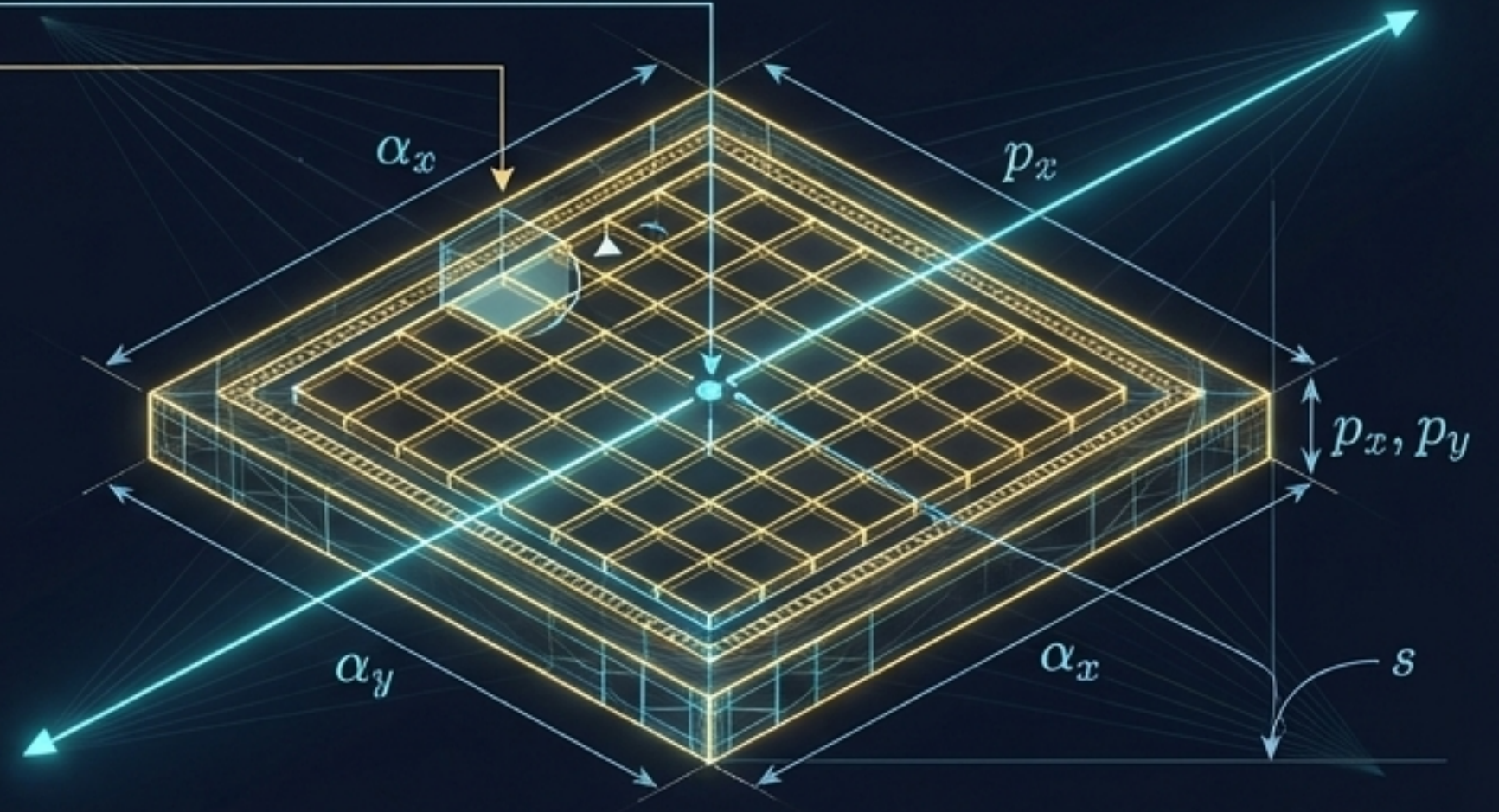
$\mathbf{R}$ (Rotasyon): Kameranın dünya koordinatlarına göre yönelimini belirleyen 3x3 ortogonal matris.

$\tilde{\mathbf{C}}$ (Merkez): Kameranın dünya koordinat sistemindeki 3B fiziksel konumudur. $\mathbf{t} = -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}}$ ilişkisi geçerlidir.

Sonlu bir kamera için $\mathbf{P}$ matrisi, donanımsal özellikleri ve fiziksel konumlanmayı birbirinden ayıran açık formda yazılabilir.

K Kalibrasyon Matrisi: Sensörün Matematiksel Modeli

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & p_x \\ 0 & \alpha_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



α_x, α_y (Odak Uzaklığı)

Kameranın odak uzaklığının (f) piksellerin en ve boy boyutlarına bölünmesiyle elde edilen, piksel cinsinden odak uzaklıkları ve piksel en-boy (aspect) oranı.

p_x, p_y (Ana Nokta)

Sensör üzerindeki optik merkezin, resim orijinine göre ofset değerleri. Optik eksenin sensörü kestiği noktadır.

s (Çarpıklık - Skew)

Piksel eksenleri arasındaki diklikten sapma miktarı. Modern CCD sensörlerde genellikle $s = 0$ 'dır.

Sütunların Geometrik Anlamı: Kaçış Noktaları

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]$$

$\mathbf{P}$ matrisinin sütunları, 3B dünyanın temel referanslarının görüntüdeki izdüşümleridir:

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$:

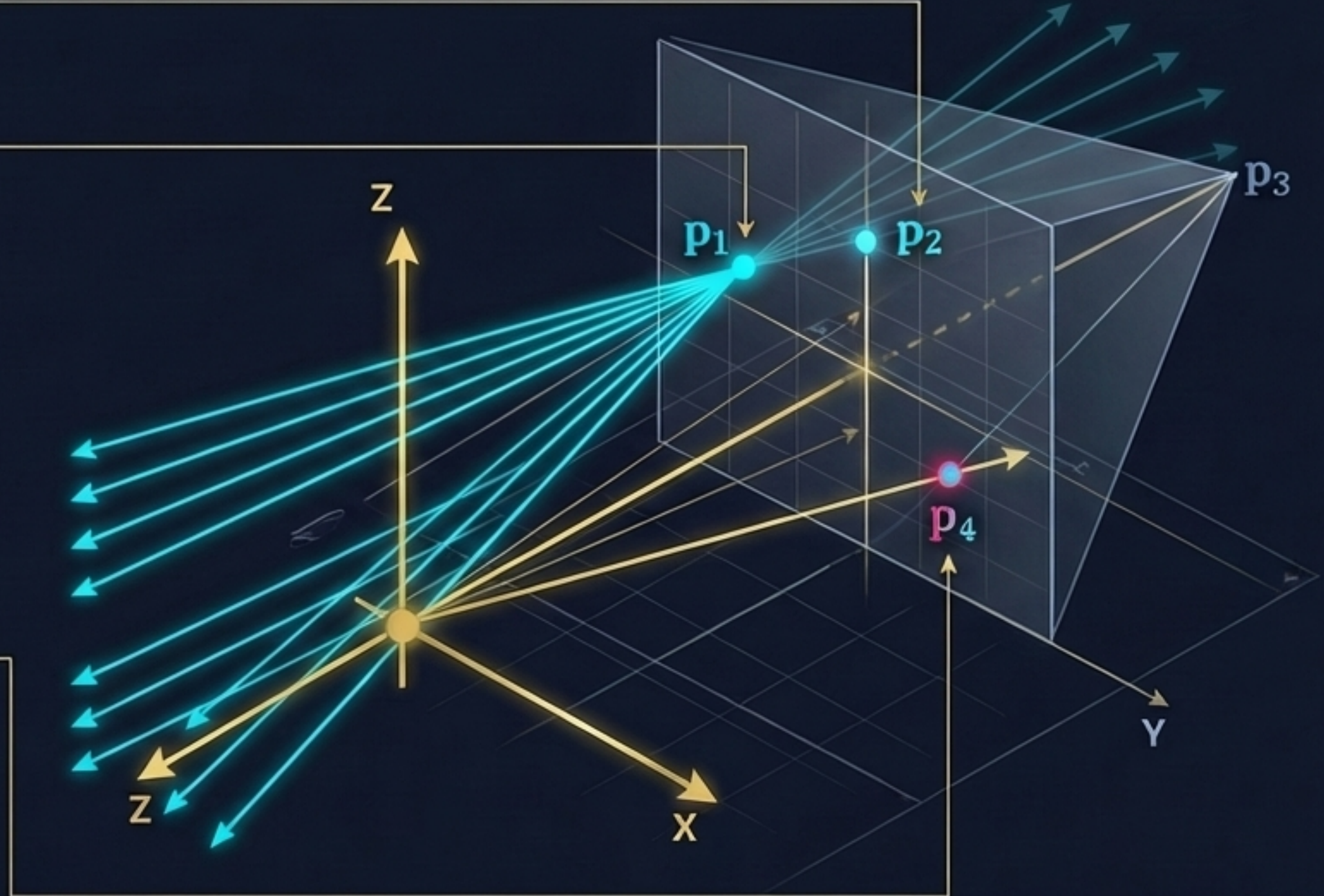
Sırasıyla X, Y ve Z eksenlerinin yönlerinin görüntüdeki kaçış noktalarıdır (vanishing points).

Geometrik İspat:

Dünya X eksenini boyunca sonsuza giden yön vektörü $\mathbf{D}_x = (1, 0, 0, 0)^T$ 'dir. Bu yönün görüntüdeki karşılığı $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}\mathbf{D}_x$ 'tir.

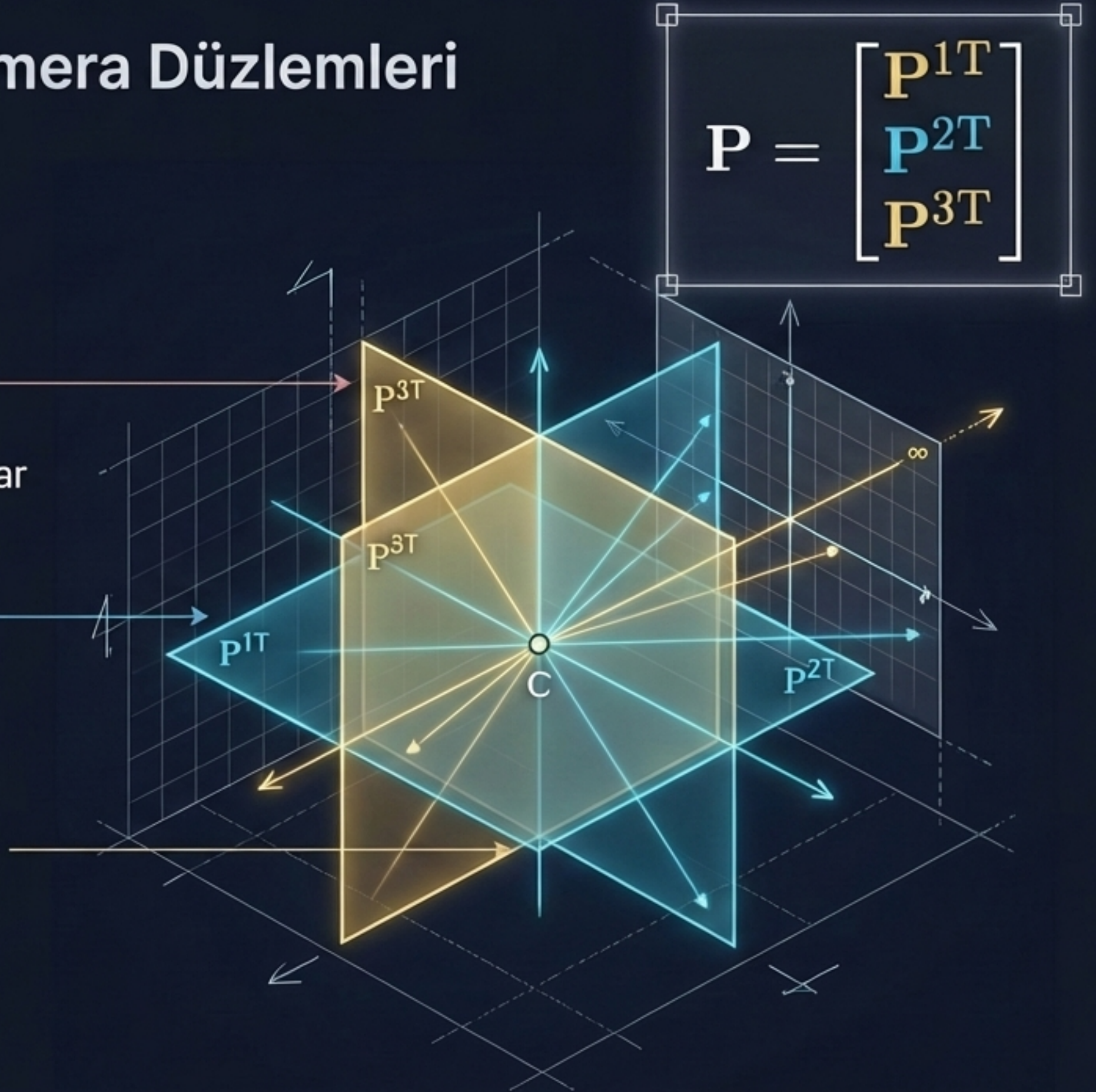
$\mathbf{p}_4$:

Dünya orijininin $(0,0,0,1)^T$ görüntü düzlemindeki konumudur. Sadece ötelemeye (t) bağlıdır.



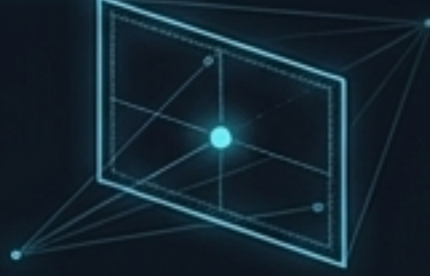
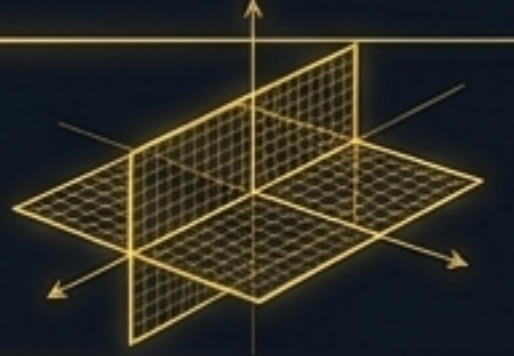
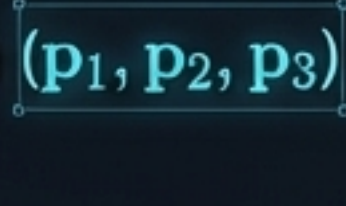
Satırların Geometrik Anlamı: Kamera Düzlemleri

- P 'nin her bir satırı, uzayda kamera merkezinden geçen bir 3B düzlemi temsil eder.
- **P^3T (Ana Düzlem - Principal Plane):** Kamera merkezinden geçen ve görüntü düzlemine paralel olan düzlemdir. Bu düzlem üzerindeki noktalar görüntüde sonsuza (kaçış çizgisine) yansır.
- **P^1T ve P^2T (Eksen Düzlemleri):** Sırasıyla görüntüdeki $x=0$ (y-ekseni) ve $y=0$ (x-ekseni) doğrularına yansıyan, yine kamera merkezinden geçen düzlemlerdir.
- **Kesişim:** P matrisi rank-3 olduğu için bu üç düzlem birbiriyle benzersiz tek bir noktada kesişir: O nokta kameranın optik merkezidir (C).



Matris Sentezi: Sütunlar ve Satırlar

Cebirsel yapıların arkasındaki geometrik zıtlıkların özeti:

	Sütunlar $(\mathbf{p}_i)$	Satırlar $(\mathbf{P}^{iT})$
Matematiksel Varlık	3-vektör	4-vektör
Geometrik Karşılık	Nokta (Görüntü Düzleminde) 	Düzlem (3B Uzayda) 
Fiziksel Anlam	Eksenlerin Kaybolma Noktaları $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ ve Dünya Orijini $(\mathbf{p}_4)$ 	Ana Düzlem $(\mathbf{P}^3)$ ve Kamera Eksen Düzlemleri $(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2)$ 
Referans Sistemi	Dünya Koordinat Sistemine (World Frame) göre tanımlı.	Kamera Konumu ve Görüntü (Image Frame) sistemine göre tanımlı.

Kamera Merkezi: Sağ Sıfır Uzayı (Null-space)

İzdüşüm mekanizmasında tek bir noktanın görüntüsü tanımsızdır: Kameranın kendi fiziksel merkezi.

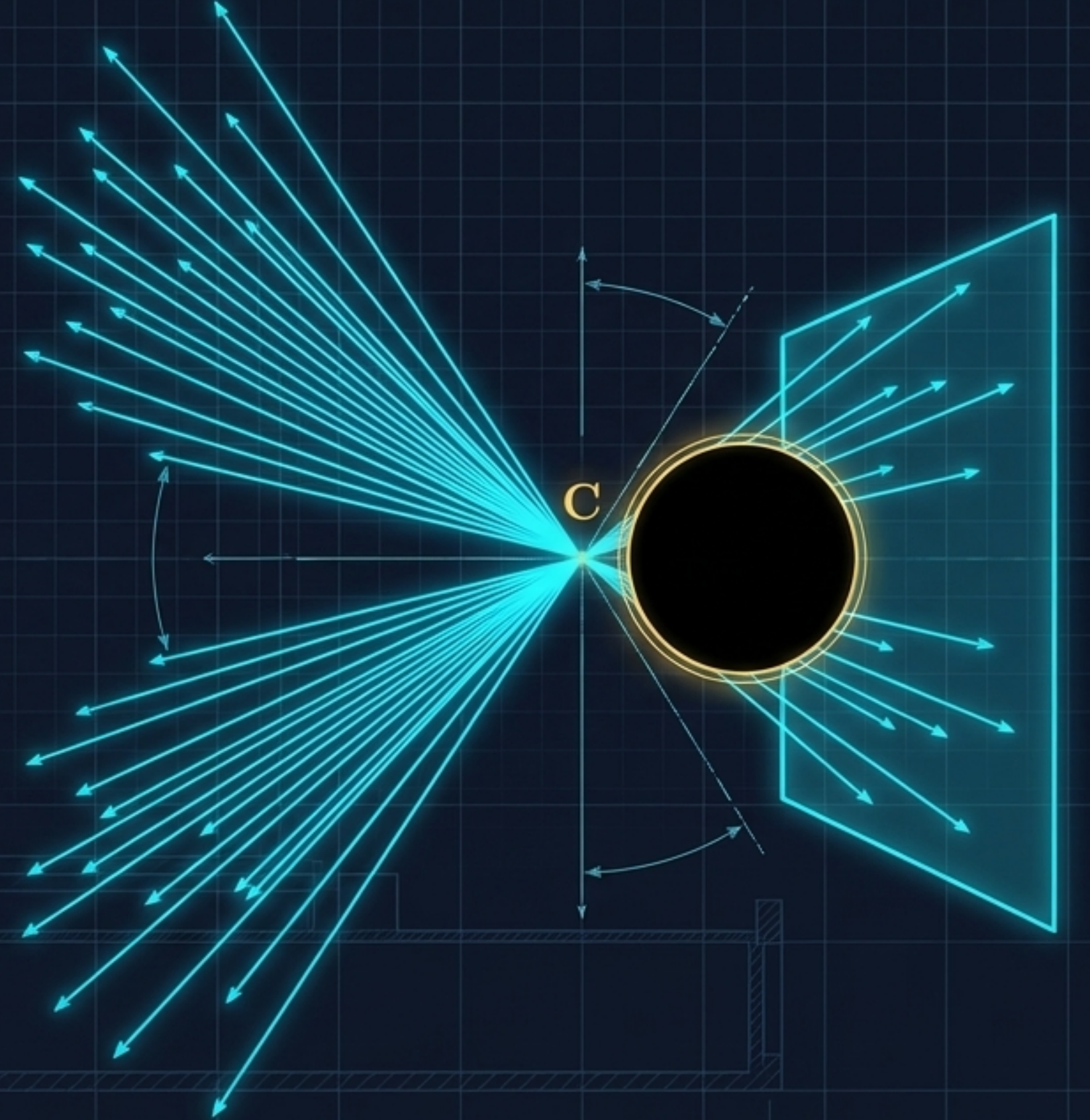
Matematiksel olarak bu, **C** noktasının **P** matrisinin 1 boyutlu **sağ sıfır uzayı** (right null-space) olduğu anlamına gelir.

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Kamera merkezini cebirsel olarak çözmek:

Eğer $\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{p}_4]$ sonlu bir projektif kamera ise (sol 3×3 bloğu tekil değilse), merkezin homojen koordinatları sıfır uzayı denkleminde elde edilir:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Matris Ayırıştırması: Tersine Mühendislik (RQ Factorization)



Problem: Doğrudan kalibrasyon algoritmalarından sadece 11-dof bir P matrisi tahmin ettik. K , R , t parametrelerini nasıl geri kazanırız?

Çözüm: RQ Ayırıştırması (RQ Decomposition)

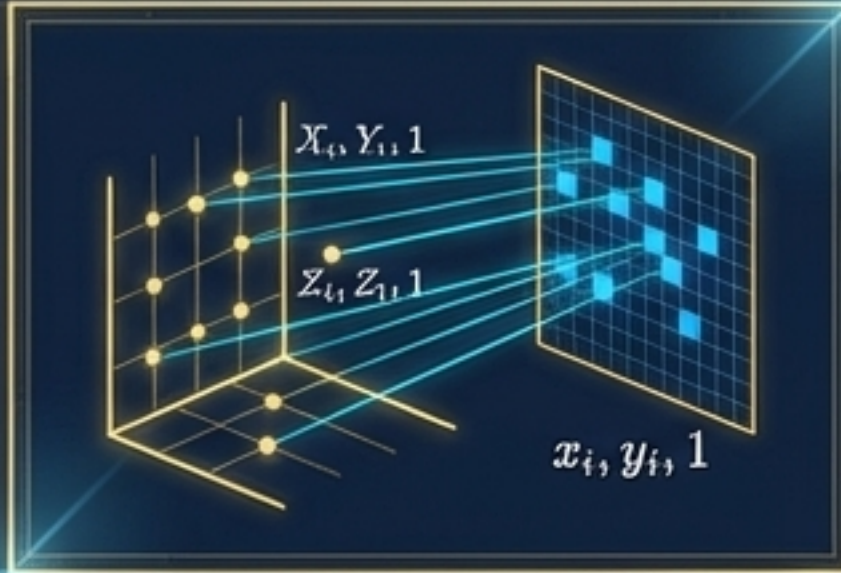
1. P matrisini bloklarına ayırın: $P = [M \mid p_4]$
2. Sol alt matris M 'i izole edin. M , içsel (K) ve Dışsal (R) özelliklerin çarpımıdır: $M = KR$
3. M matrisini RQ Ayırıştırmasına tabi tutun. (QR değil, RQ ayırıştırması!)

- R : Ortogonal bir rotasyon matrisi (Kameranın uzaydaki yönelimi).
- K : Üst üçgensel (upper-triangular) kalibrasyon matrisi (Lens/Sensör donanımı).

Bu işlem, pozitif diyagonal değerler koşuluyla benzersiz bir fiziksel ayırıştırma sağlar.

Tahmin (Estimation) ve İş Akış İlişkisi

Pratik bilgisayarla görme (computer vision) sistemlerinde, $\mathbf{P}$ matrisinin teorik özellikleri geriye dönük bir tahmin iş akış ilişkisi ile kurgulanır:



1. Nokta Eşleştirmeleri (Point Correspondences)

Bilinen 3B dünya noktaları ile gözlemlenen 2B piksel koordinatları eşleştirilir. En az 6 nokta çifti gereklidir.



$$x_i \times PX_i = 0$$
$$\begin{bmatrix} A & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. DLT (Direct Linear Transformation)

Homojen denklemler $x_i \times PX_i = 0$ formatına çevrilir. Problem, cebirsel hataları minimize eden bir sisteme dönüştürülüp lineer olarak başlangıç $\mathbf{P}$ değeri hesaplanır.



3. Non-Linear Optimizasyon

Lineer sonuç her zaman fiziksel olarak kusursuz değildir; doğrusal olmayan iteratif dengelemeye hazırlık yapılır.

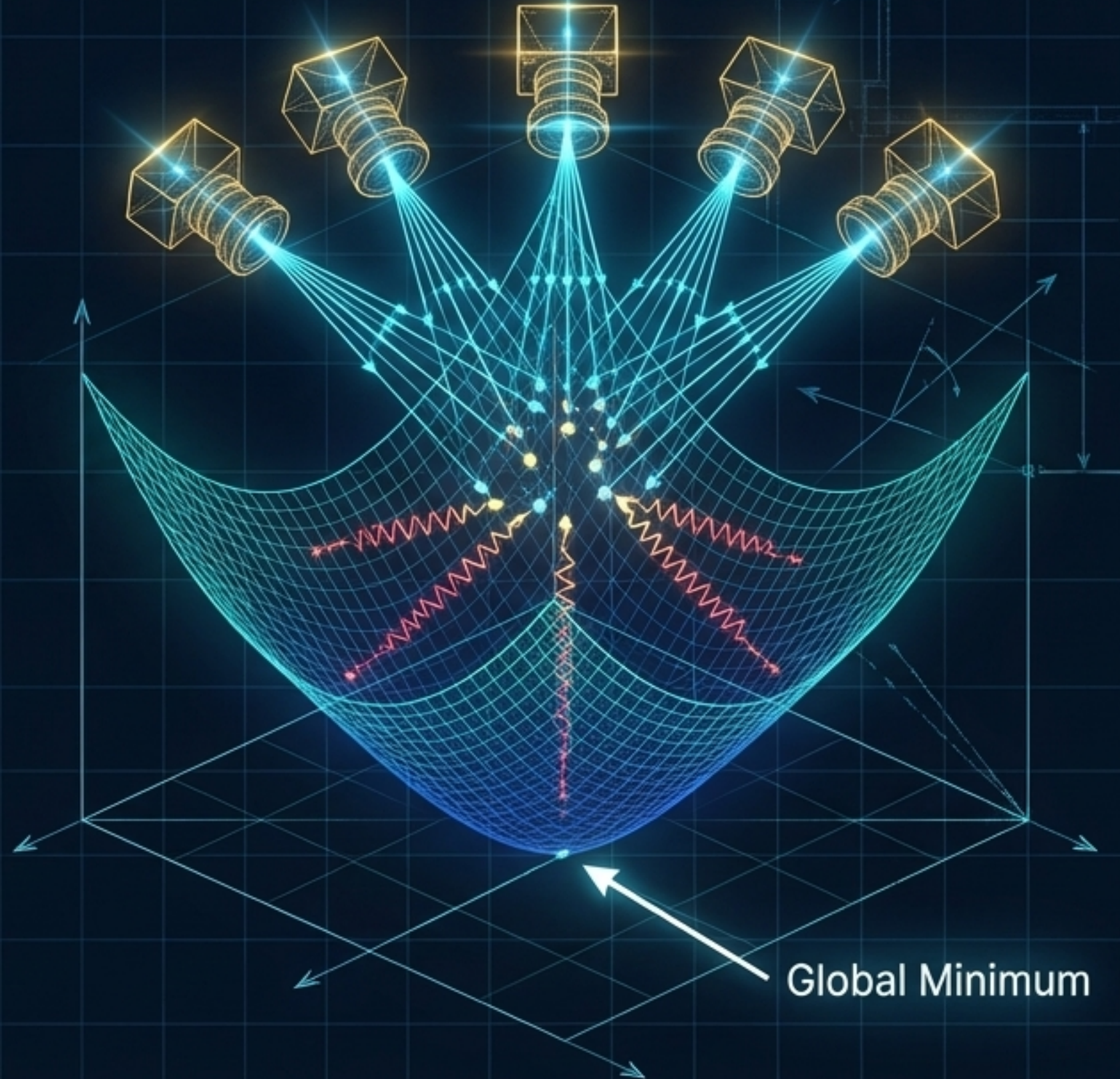
Geometrik Optimizasyon: Demet Dengeleme (Bundle Adjustment)

Cebirsel hata minimizasyonu, fiziksel olarak en iyi kamerayı vermez. Sensör gürültülerini ve gerçek dünya sapmalarını gidermek için Demet Dengeleme kullanılır.

Demet dengeleme, tekrar izdüşüm hatasını (reprojection error) en aza indirmek için **P** (Kamera) ve **X_i** (Yapı) değerlerini eşzamanlı ve iteratif olarak optimize eder:

$$\min_{P, X_i} \sum_i \|x_i - PX_i\|^2$$

- Bu bir doğrusal olmayan (non-linear) maliyet fonksiyonudur.
- Levenberg-Marquardt algoritması kullanılarak ışınlar (demetler) iteratif olarak dengelenir ve **P** matrisi nihai hassasiyetine kavuşur.

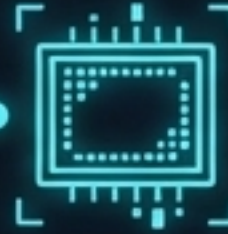


Büyük Sentez: $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$



11 dof / Demet Dengeleme

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \left[\mathbf{R} \mid -\mathbf{R} \tilde{\mathbf{c}} \right] \mathbf{X}$$



Intrinsics



Kamera İzdüşüm Matrisi (P), karmaşık bir donanım sistemini 11 serbestlik derecesiyle kusursuz ve kompakt bir cebirsel yapıya indirger.

Zarafet: İzdüşümsel geometrinin (homojen koordinatlar) gücüyle, doğrusal olmayan perspektif problemi doğrusal bir $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ formuna dönüşür.

Teoriden Pratiğe: Bu zarif blok (RQ ayrıştırması ile sökülen ve Demet Dengeleme ile kalibre edilen formül), modern 3B yapılandırma ve bilgisayarla görme iş akış ilişkisinin değişmez temelidir.